

Analyse quantitative de l'erreur pour la reconstruction de dérivées

L. Condat

Laboratoire GREYC — Équipe Image

UMR CNRS-UCBN-ENSICAEN

6 Boulevard du Maréchal Juin, 14050 CAEN CEDEX

laurent.condat@greyc.ensicaen.fr

Résumé

Nous considérons le problème de la reconstruction continue de la dérivée d'un signal à partir d'échantillons uniformes ponctuels ou généralisés sur celui-ci. Nous présentons une méthode générale en domaine de Fourier, qui fournit une estimation précise de l'erreur d'approximation entre la vraie dérivée et son estimée. Ce formalisme est applicable à une grande variété de méthodes de reconstruction linéaires et invariantes par translation. Il fournit les outils nécessaires à la conception de schémas de reconstruction de dérivées performants et quasi-optimaux au sens des moindres carrés.

Mots Clefs

Dérivée, reconstruction, échantillonnage, interpolation, approximation, analyse de l'erreur, noyau d'erreur fréquentiel.

Abstract

We present a general Fourier-based method which provides an accurate prediction of the approximation error, when the derivative of a signal is continuously reconstructed from uniform point samples or generalized measurements on the signal. This formalism applies to a wide class of linear shift-invariant techniques. It provides a key tool, the frequency error kernel, for designing computationally efficient reconstruction schemes which are near optimal in the least-squares sense.

Keywords

Derivative, reconstruction, sampling, interpolation, approximation, error analysis, frequency error kernel.

1 Introduction

La reconstruction d'une fonction et de ses dérivées à partir d'une séquence d'échantillons discrets est une opération fondamentale en traitement du signal, en analyse numérique, et dans bien d'autres domaines scientifiques. En visualisation, par exemple, le gradient est employé pour la classification ou l'ombrage (*shading*) [1]. Il doit être évalué à des positions arbitraires et pas seulement aux positions discrètes où le signal sous-jacent a été échantillonné. La détection de contours, la segmentation, l'estimation de mou-

vement et la super-résolution sont d'autres champs d'application où des dérivées partielles peuvent être requises à une résolution sous-pixellique.

1.1 Formulation du problème

On note $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction (un signal) défini continûment, qui est préfiltré et échantillonné pour donner les mesures discrètes

$$u[k] = \int_{\mathbb{R}} s(t) \tilde{\varphi}(k - \frac{t}{T}) d\frac{t}{T} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

où T est le pas d'échantillonnage et la fonction d'analyse $\tilde{\varphi}(t)$ est, par exemple, la réponse impulsionnelle du dispositif d'acquisition. Ce scénario d'échantillonnage généralisé comprend comme un cas particulier le cas où des valeurs ponctuelles $u[k] = s(Tk)$ sont disponibles, simplement en posant formellement $\tilde{\varphi} = \delta$, la distribution de Dirac.

Le signal $s(t)$ est inconnu et la séquence $u = (u[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ représente les seules données disponibles. On s'intéresse à la reconstruction, à partir de u , d'une estimée de la dérivée N -ième $s^{(N)}(t)$ de $s(t)$, pour un entier $N \geq 1$. On cherche une reconstruction qui appartienne à un espace linéaire invariant par translation $\mathcal{V}_T(\varphi) = \text{Vect}(\{\varphi(\frac{t}{T} - k)\}_{k \in \mathbb{Z}})$ généré par les translats d'une fonction prototype $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f(t) = \frac{1}{T^N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] \varphi(\frac{t}{T} - k) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

où les coefficients $c[k]$ sont obtenus par préfiltrage discret à l'aide du préfiltre stable $p \in \ell^1$:

$$c[k] = (u * p)[k] \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Dans ce cadre de reconstruction générique, nous notons f_{app} une estimée de s (avec $N = 0$ en (2)), alors qu'une estimée de la dérivée $s^{(N)}$ est notée f_{der} . On remarque que la méthode de reconstruction implique un préfiltrage discret suivi par la modélisation continue elle-même. Dans les applications pratiques, le préfiltrage est effectué une fois pour toute. Le temps de calcul requis est négligeable en comparaison des multiples appels à (2) pour évaluer f aux positions désirées.

L'estimation de la fonction $s(t)$ elle-même est le problème classique d'interpolation, qui a reçu un traitement extensif dans la littérature. On renvoie le lecteur intéressé aux articles tutoriaux [2, 3, 4, 5] et à quelques développements récents dans ce domaine [6, 7, 8]. Bien sûr, si une estimée $f_{\text{app}}(t)$ de $s(t)$ a été reconstruite, on peut considérer sa dérivée $f_{\text{app}}^{(N)}(t)$ comme une estimée valide de $s^{(N)}(t)$. Mais il n'y a aucune garantie *a priori* que $f_{\text{app}}^{(N)}$ soit proche de $s^{(N)}$ si f_{app} est proche de s , au sens des moindres carrés. De plus, l'efficacité algorithmique contraint généralement la conception de la méthode, de telle sorte qu'il est intéressant de concevoir des schémas d'estimation directs de $s^{(N)}$, sans l'étape conceptuelle intermédiaire d'évaluation de s qui ajoute inutilement des conditions sur la précision et la lissitude du schéma. Ce travail vise à fournir un moyen de quantifier l'erreur entre $s^{(N)}$ et f_{der} , afin de pouvoir comparer différentes approches et de rendre aisée la conception de schémas de reconstruction performants.

1.2 Travaux connexes

Il existe une importante littérature concernant les différentiateurs numériques (*digital differentiators*), qui sont des filtres discrets visant à estimer la dérivée aux points de la grille Tk seulement; voir par ex. [9] et les références incluses. Par contraste, nous considérons le problème où la dérivée doit être reconstruite continûment, afin qu'elle puisse être évaluée à des positions arbitraires. Dans notre cadre, le préfiltre p peut être un différentiateur numérique, combiné avec un générateur φ interpolant. Mais ce n'est qu'une possibilité de schéma parmi d'autres.

La théorie de Shannon [10] fournit un moyen exact de retrouver un signal à bande limitée à partir de ses échantillons, en utilisant l'interpolant sinus cardinal sinc. De même, le noyau de reconstruction de dérivée "idéale" est la dérivée du sinc [11]. Cependant, sa lente décroissance et les artefacts oscillants qu'il introduit empêchent son utilisation en pratique. De plus, pour des signaux qui ne sont pas à bande limitée, la théorie de Shannon ne s'applique plus [12, 3, 13, 14, 15]. C'est pourquoi les praticiens préfèrent utiliser des noyaux de reconstruction plus localisés, ayant un support compact, comme des versions apodisées du sinc [16, 17], des fonctions polynomiales par morceaux [11], ou encore des splines [2, 3]. Mais on ne trouve dans aucun de ces travaux une comparaison analytique des méthodes ou une analyse quantitative de l'erreur.

T. Möller et coll. ont développé des outils théoriques et calculé des bornes d'erreur absolue pour l'analyse spatiale de méthodes d'interpolation et de reconstruction de dérivées [18]. La théorie de l'approximation vise aussi à étudier les méthodes de reconstruction [19, 20], sous l'angle du comportement asymptotique lorsque T tend vers 0. Cependant, ces études qualitatives de l'erreur ne sont généralement pas suffisamment précises pour être utilisables directement en traitement du signal et il est souhaitable de pouvoir prédire avec précision l'erreur d'approximation, afin de choisir tel ou tel schéma de reconstruction

en connaissance de cause. Pour cela, Blu et coll. ont proposé une méthode remarquable en domaine de Fourier, qui fournit une estimation précise de l'erreur d'approximation, avec un large domaine d'applicabilité [21]. Leur approche rend la conception d'algorithmes simple et précise, et se trouve au cœur des récents développements en théorie de l'interpolation [6, 7, 8]. Le but de cet article est d'étendre cette théorie au cadre de la reconstruction de dérivées.

1.3 Notations et hypothèses mathématiques

La transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ est $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-j\omega t} dt$. La transformée en z d'un signal discret $v = (v[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ est $V(z) = \sum_{\mathbb{Z}} v[k]z^{-k}$ et sa transformée de Fourier est $\hat{v}(\omega) = V(e^{j\omega})$.

Pour tout $r > 0$, l'espace de Sobolev W_2^r est l'ensemble des fonctions f telles que $\int_{\mathbb{R}} (1 + \omega^2)^r |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty$. La régularité de Sobolev de f est ainsi la valeur maximale de r telle que $f \in W_2^r$.

\mathcal{P}^n est l'espace des polynômes de degré au plus $n \in \mathbb{N}$. On définit la B-spline causale $\beta_+^n(t)$ de degré $n \in \mathbb{N}$ comme $\beta_+^0 = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $\beta_+^n = \beta_+^{n-1} * \beta_+^0$. La B-spline centrée de degré n est alors $\beta^n(t) = \beta_+^n(t + \frac{n+1}{2})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit aussi le filtre de différence finie causal itéré d^n par $D^n(z) = (1 - z^{-1})^n$. δ_k , à ne pas confondre avec la distribution de Dirac $\delta(t)$, est le symbole de Kronecker égal à 0 sauf si $k = 0$ auquel cas il vaut 1.

On introduit la fonction duale ϕ_d d'une fonction $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ par $\phi_d(\omega) = \hat{\phi}(\omega)^* / \hat{a}_\phi(\omega)$, où le filtre d'autocorrélation discrète a_ϕ est défini par $a_\phi[k] = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\phi(t-k) dt$ et l'étoile indique la conjugaison complexe.

On impose à la fonction d'analyse $\tilde{\varphi}$ d'avoir une transformée de Fourier qui soit bien définie et bornée. De plus, afin que toute fonction de l'espace de reconstruction $\mathcal{V}_T(\varphi)$ ait une expansion de la forme (2) unique et stable, on impose aux translatés de φ de former une base de Riesz; c'est-à-dire qu'il doit exister deux constantes $B \geq A > 0$ telles que $A \leq \hat{a}_\varphi(\omega) \leq B$ presque partout.

1.4 Organisation de l'article

En section 2, nous introduisons le noyau d'erreur fréquentiel, qui est la pierre angulaire pour quantifier l'erreur entre une fonction et son estimée à partir de mesures discrètes. Nous présentons nos résultats en section 3, basés sur un nouveau noyau d'erreur adapté à la reconstruction de dérivées. En section 4, nous discutons des implications du formalisme pour la conception de méthodes de reconstruction efficaces. Finalement, nous illustrons notre méthodologie par l'étude de méthodes reconstruisant la dérivée seconde en section 5.

2 Le noyau d'erreur fréquentiel

Un résultat important de Blu et coll. [21] a été de montrer que l'erreur $\|s - f_{\text{app}}\|_{L^2}$ entre s et son estimée reconstruite au moyen de (2) peut être prédite très précisément par la

formule :

$$\eta_s(T) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\omega)|^2 E(T\omega) d\omega}, \quad (4)$$

où apparaît le *noyau d'erreur fréquentiel* défini par

$$E(\omega) = 1 - \underbrace{\frac{|\hat{\varphi}(\omega)|^2}{\hat{a}_\varphi(\omega)}}_{E_{\min}(\omega)} + \underbrace{\hat{a}_\varphi(\omega) |\hat{\varphi}(\omega) \hat{p}(\omega) - \hat{\varphi}_d(\omega)|^2}_{E_{\text{res}}(\omega)}. \quad (5)$$

Les propriétés remarquables de cette estimée globale $\eta_s(T)$ de l'erreur incluent son exactitude pour les signaux à bande limitée et pour calculer l'erreur moyenne sur tous les translats possible de s . En règle générale, on a la propriété

$$\|s - f_{\text{app}}\|_{L^2} = \eta_s(T) + o(T^r) \quad (6)$$

en supposant que s a une régularité de Sobolev $r > \frac{1}{2}$.

De plus, dans un cadre stochastique où s n'est plus une fonction déterministe mais la réalisation d'un processus aléatoire stationnaire de densité spectrale $\hat{c}_s(\omega)$, $\eta_s(T)$ est l'expression exacte de l'espérance de l'erreur quadratique, qui est T -periodique, moyennée en temps :

$$\eta_s(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}\{|s(t) - f_{\text{app}}(t)|^2\} dt, \quad (7)$$

en remplaçant l'énergie $|\hat{s}(\omega)|^2$ par $\hat{c}_s(\omega)$ en (4).

Ces propriétés et plusieurs autres du noyau d'erreur fréquentiel sont détaillées dans [21] et [22].

En pratique, $|\hat{s}(\omega)|^2$ ou $\hat{c}_s(\omega)$ est inconnue, mais la forme multiplicative de l'intégrale (4) assure que l'erreur est faible si $E(\omega)$ est proche de zéro. Ainsi, le noyau d'erreur fréquentiel $E(\omega)$ est un outil de choix pour quantifier la qualité intrinsèque d'un schéma de reconstruction. en particulier, φ et p peuvent être choisis afin de minimiser $E(\omega)$, de sorte que la qualité de reconstruction est maximisée pour virtuellement toute fonction s [6, 7, 8, 23].

L'espace de reconstruction $\mathcal{V}_T(\varphi)$ étant fixé, le noyau d'erreur $E(\omega)$ atteint sa valeur minimale $E_{\min}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ lorsque f_{app} est la meilleure reconstruction possible, au sens des moindres carrés, de s dans $\mathcal{V}_T(\varphi)$; c'est-à-dire, sa projection orthogonale dans $\mathcal{V}_T(\varphi)$. Ainsi, le préfiltre p doit être conçu de telle sorte que $E(\omega)$ soit proche de $E_{\min}(\omega)$, afin que la méthode de reconstruction se comporte essentiellement comme la projection orthogonale dans $\mathcal{V}_T(\varphi)$, qui est généralement inaccessible [21, 8].

3 Estimation de l'erreur quadratique de reconstruction

Nous définissons la fonction $\psi(t)$ par

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p[k] \varphi(t - k) \Leftrightarrow \hat{\psi}(\omega) = \hat{p}(\omega) \hat{\varphi}(\omega). \quad (8)$$

Ainsi, $f_{\text{der}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u[k] \psi(t - k)$. Bien qu'en pratique φ soit choisie avec un support compact, afin que (2) soit algorithmiquement avantageuse, la fonction ψ , qui est la réponse impulsionnelle de l'opération de reconstruction, peut avoir un support infini.

Nous supposons que les conditions équivalentes suivantes sur ψ sont satisfaites, de telle manière que f_{der} ne diverge pas lorsque T tend vers zéro (à cause du facteur $1/T^N$ dans (2)) :

$$f_{\text{der}} = 0 \text{ si } s \in \mathcal{P}^{N-1}, \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(k) \psi(t - k) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathcal{P}^{N-1}, \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\psi}^{(n)}(2k\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall n = 0 \dots N-1. \quad (11)$$

Nous re-dérivons en annexe ces équivalences classiques en analyse harmonique.

Notre seconde contrainte est que ψ puisse être décomposée sous la forme

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q[k] \phi(t - k) \Leftrightarrow \hat{\psi}(\omega) = \hat{q}(\omega) \hat{\phi}(\omega), \quad (12)$$

où $q \in \ell^1$ est un filtre discret et les translats de la fonction $\phi \in L^2$ forment une base de Riesz. Cette hypothèse n'est pas restrictive ; en particulier, il n'est pas requis que ϕ soit à support compact, même si c'est le cas de φ . Notons de plus que ϕ n'est en aucun cas unique.

Notre dernière hypothèse est que $s \in L^2$ a une régularité de Sobolev $r > N + \frac{1}{2}$, de telle manière que s a au moins N dérivées continues dans L^2 .

Les deux contraintes portant sur ψ impliquent que 0 est racine de q de multiplicité N . En d'autres termes, il existe un filtre stable $h \in \ell^1$ tel que $q = h * d^N$. Ainsi, on a décomposé $\psi = p * \varphi$ en un filtre de différence glissante q et un noyau de reconstruction ϕ bien conditionné. Cela nous permet, en raisonnant sur ϕ et non sur φ , de nous placer dans les conditions d'application de la théorie présentée en section 2. Afin de pouvoir appliquer ces résultats, nous avons besoin de la propriété suivante :

Lemme. On définit $v = \frac{1}{T^N} u * d^N$. Alors, $v[k] = \int_{\mathbb{R}} s^{(N)}(t) \tilde{\phi}(k - \frac{t}{T}) d\frac{t}{T}$, où $\tilde{\phi} = \tilde{\varphi} * \beta_+^{N-1}$.

Ce lemme important, prouvé en annexe, nous permet d'interpréter les mesures $u[k]$ filtrées comme des échantillons généralisés de la dérivée $s^{(N)}$. La connaissance sur s disponible au travers de u devient ainsi une connaissance portant directement sur $s^{(N)}$.

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour formuler les résultats suivants, prouvés en annexe.

Théorème 1. $\|s^{(N)} - f_{\text{der}}\|_{L^2} = \eta_{s^{(N)}}(T) + o(T^{r-N})$, où

$$\eta_{s^{(N)}}(T) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|\hat{s}(\omega)|^2}_{|\hat{s}^{(N)}(\omega)|^2} \omega^{2N} E(T\omega) d\omega \right)^{1/2}, \quad (13)$$

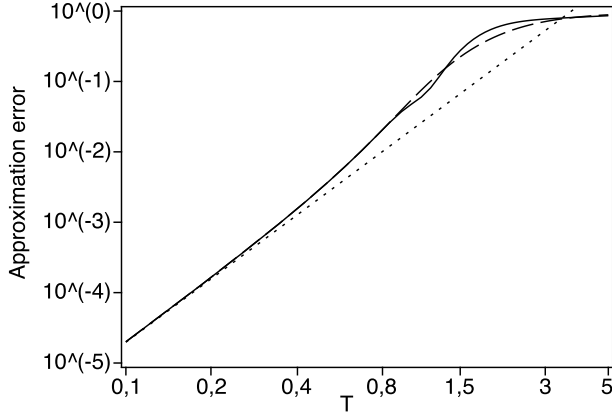


FIGURE 1 – Erreur de reconstruction en fonction du pas d'échantillonnage T . On estime la dérivée première $s'(t)$ de $s(t) = e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$ par la dérivée de la spline cubique interpolant les échantillons ponctuels $u[k] = s(Tk)$. On a ainsi $\tilde{\varphi} = \delta$, $\varphi = (\beta^3)'$ et $P(z) = 6/(z + 4 + z^{-1})$. L'estimée de l'erreur $\eta_{s'}(T)$ (courbe en pointillés longs) est proche de l'erreur exacte $\|s' - f_{\text{der}}\|_{L^2}$ (courbe en trait plein). La courbe en pointillés courts est l'asymptote de l'erreur $C\|s^{(4)}\|_{L^2}T^3$, où la constante asymptotique d'approximation $C = 1/\sqrt{30240}$ est obtenue à partir du développement de Taylor $E(\omega)^{1/2} \sim C\omega^3$.

et le nouveau noyau d'erreur fréquentiel caractérisant la reconstruction de dérivées est

$$E(\omega) = 1 - \underbrace{\frac{|\hat{\varphi}(\omega)|^2}{\hat{a}_\varphi(\omega)}}_{E_{\min}(\omega)} + \underbrace{\hat{a}_\varphi(\omega) \left| \hat{\varphi}(\omega) \hat{p}(\omega) \frac{1}{(j\omega)^N} - \hat{\varphi}_d(\omega) \right|^2}_{E_{\text{res}}(\omega)}. \quad (14)$$

De plus, le terme de correction $o(T^{r-N})$ s'annule lorsque s est à bande limitée dans $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$, ou si $\tilde{\varphi}$ et φ sont toutes deux à bande limitée dans $[-\pi, \pi]$.

Théorème 2. Dans un cadre stochastique où s est la réalisation d'un processus aléatoire stationnaire de densité spectrale $\hat{c}_s(\omega)$, et non plus une fonction déterministe de L^2 , on a, en remplaçant $|\hat{s}(\omega)|^2$ par $\hat{c}_s(\omega)$ dans (13),

$$\eta_{s^{(N)}}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E} \{ |s^{(N)}(t) - f_{\text{der}}(t)|^2 \} dt. \quad (15)$$

Sur la figure 1, nous donnons un exemple de l'estimée $\eta_{s'}(T)$ pour l'expérience pratique qui consiste à reconstruire la dérivée d'une gaussienne à partir d'échantillons ponctuels. Cet exemple montre que $\eta_{s^{(N)}}(T)$ est une approximation précise, invariante par translation, de l'erreur de reconstruction. On note que si $s \in W_2^r$ pour tout $r \geq 0$, ce qui est le cas dans notre exemple, alors la différence entre $\eta_{s^{(N)}}(T)$ et l'erreur exacte décroît plus vite que n'importe quel polynôme en T lorsque T tend vers zéro. Cela signifie que $\eta_{s^{(N)}}(T)$ peut être considéré comme la valeur

exacte de l'erreur dans un intervalle non infinitésimal, par ex. pour $T \in [0, 0.9]$ sur la figure 1. Dans le cas général, $\eta_{s^{(N)}}(T)$ est une estimée fiable de l'erreur pour des valeurs pratiques de T , contrairement aux analyses de l'erreur basées sur des développements de Taylor, qui ne sont significatives que dans le régime asymptotique où s est largement sur-échantillonné.

4 Critères pour la conception de méthodes de reconstruction

4.1 L'ordre d'approximation

À partir du théorème 1, étant donné que la forme analytique de $\eta_{s^{(N)}}(T)$ est disponible, il est aisé de calculer le développement de Taylor de l'erreur par rapport à T , afin de caractériser de manière exacte le comportement de l'erreur lorsque T tend vers zéro. Ainsi, en supposant que $s^{(N)}$ a une régularité de Sobolev au moins égale à L , on a l'équivalence

$$\begin{aligned} E(\omega)^{1/2} &\sim C\omega^L \quad \text{quand } \omega \rightarrow 0 & (16) \\ \Leftrightarrow \|s^{(N)} - f_{\text{der}}\|_{L^2} &\sim C\|s^{(N+L)}\|_{L^2}T^L \quad \text{quand } T \rightarrow 0. & (17) \end{aligned}$$

Dans ce cas, on parle d'une méthode ayant un ordre d'approximation égal à L . Pour les applications où le signal a son énergie spectrale concentrée au voisinage de $\omega = 0$ (par exemple les images naturelles ou les signaux physiques en $1/f$), l'ordre d'approximation est le critère le plus déterminant pour la qualité de reconstruction. Il doit donc être choisi aussi grand que possible. Afin que le schéma ait un ordre d'approximation L , il est nécessaire que ϕ satisfasse les conditions de Strang-Fix d'ordre L [19] :

$$\hat{\phi}(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\phi}^{(n)}(2k\pi) = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} k \neq 0 \\ n = 0 \dots L-1 \end{cases}. \quad (18)$$

Il a été montré qu'une fonction d'ordre d'approximation L a un support de taille supérieure ou égale à L , avec égalité si et seulement si la fonction est une MOMS [6]. Par conséquent, les méthodes de reconstruction présentant le meilleur compromis entre la qualité et le temps de calcul sont celles pour lesquelles le générateur φ est une MOMS. Sur ce point, il existe une relation intéressante avec la théorie des ondelettes. Les conditions équivalentes (9),(10),(11) impliquent que ψ a N moments nuls : $\int_{\mathbb{R}} t^n \psi(t) dt = 0$, $\forall n \in 0 \dots N-1$. ψ a donc des propriétés similaires à celles des ondelettes. Il est connu que les ondelettes se comportent comme des différentiateurs [24]. Aussi, il a été montré qu'il y a une fonction B-spline au cœur de chaque fonction d'échelle et ondelette associées à une analyse multirésolution [25]. Dans notre contexte, on ne requiert pas de propriété de type relation à deux échelles, caractéristique de la multirésolution. De plus, c'est ϕ qui est le composant de ψ portant l'ordre d'approximation et les propriétés de régularité. C'est pourquoi ce sont les fonctions MOMS, une classe plus grande que celle des fonctions B-splines, qui apparaissent naturellement lors de la conception de ϕ .

4.2 Le choix du préfiltre

Supposons la fonction φ fixée, ce qui détermine la fonction ϕ et son ordre d'approximation L (éq. (18)). Il convient alors de choisir le préfiltre p de manière à exploiter au mieux les propriétés de l'espace de reconstruction $\mathcal{V}_T(\varphi)$; c'est-à-dire, de manière à ce que le schéma soit d'ordre d'approximation L (éq. (16),(17)). En effet, $f_{\text{der}} \in \mathcal{V}_T(\varphi) \subset \mathcal{V}_T(\phi)$ et p contrôle la manière dont est choisi le représentant de $s^{(N)}$ dans $\mathcal{V}_T(\varphi)$. La meilleure reconstruction possible de $s^{(N)}$ est son projeté orthogonal dans $\mathcal{V}_T(\varphi)$. L'erreur entre $s^{(N)}$ et celui-ci, qui décroît comme T^L , est caractérisée par le noyau d'erreur E_{min} donné en (14). Ainsi, le schéma a un ordre d'approximation égal à L si et seulement si

$$E(\omega) = E_{\text{min}}(\omega) + O(\omega^{2L}). \quad (19)$$

Afin de caractériser plus précisément p , définissons la fonction

$$\tilde{\phi}_{\text{eq}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \tilde{\phi}(t - k), \quad (20)$$

où l'on rappelle que $\tilde{\phi} = \tilde{\varphi} * \beta_+^{N-1}$ et $\hat{p} \cdot \hat{\varphi} = \hat{h} \cdot \hat{d}^N \cdot \hat{\phi}$. On a alors $f_{\text{der}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y[k] \phi(\frac{t}{T} - k) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, avec $y[k] = \int_{\mathbb{R}} s^{(N)}(t) \tilde{\phi}_{\text{eq}}(k - \frac{t}{T}) d\frac{t}{T} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Alors, le schéma de reconstruction a un ordre d'approximation L si et seulement si $\tilde{\phi}_{\text{eq}}$ et ϕ sont quasi-biorthonormales à l'ordre L [21], c'est-à-dire

$$\tilde{\phi}_{\text{eq}}(\omega) \hat{\phi}(\omega + 2k\pi) = \delta_k + O(\omega^L), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (21)$$

ce qui est équivalent pour $\tilde{\phi}_{\text{eq}}$ et ϕ_d à avoir les mêmes moments jusqu'à l'ordre L :

$$\int_{\mathbb{R}} t^n \tilde{\phi}_{\text{eq}}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} t^n \phi_d(t) dt, \quad \forall n = 0 \dots L-1. \quad (22)$$

On peut ré-exprimer ces conditions en fonction de $\tilde{\varphi}$, φ et p comme suit :

$$\frac{\hat{p}(\omega)}{(j\omega)^N} \hat{\tilde{\varphi}}(\omega) \hat{\varphi}(\omega + 2k\pi) = \delta_k + O(\omega^L), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (23)$$

ou, de manière équivalente,

$$\hat{p}(\omega) \hat{\tilde{\varphi}}(\omega) = \frac{(j\omega)^N}{\hat{\varphi}(\omega)} + O(\omega^{L+N}). \quad (24)$$

Notons qu'on peut obtenir (24) directement à partir de (19). Ainsi, on choisira de préférence le préfiltre p de manière à ce que ces conditions de quasi-biorthonormalité soient satisfaites. On a une grande liberté de choix dans ce domaine, puisque les $L + N$ contraintes linéaires données par (24) suffisent à assurer que le schéma a l'ordre d'approximation maximal, étant donnée φ .

5 Étude de cas

Comparons, au moyen de leurs noyaux d'erreur, les schémas suivants de reconstruction de la dérivée seconde, à partir d'échantillons ponctuels ($N = 2$, $\tilde{\varphi} = \delta$) :

1. La première méthode consiste à appliquer le filtre de différence finie $P(z) = z - 2 + z^{-1}$ aux données, puis à interpoler la séquence obtenue au moyen de la spline linéaire $\varphi = \beta^1$. On reconstruit ainsi une fonction f_{der} linéaire par morceaux, globalement \mathcal{C}^0 .
2. La seconde méthode est similaire à la première, mais avec une interpolation spline cubique au lieu de linéaire. p est alors la combinaison du filtre de différence finie et du préfiltre d'interpolation [2] : $P(z) = 6(z - 2 + z^{-1})/(z + 4 + z^{-1})$, et $\varphi = \beta^3$ est la B-spline cubique. On reconstruit ainsi une fonction f_{der} cubique par morceaux, globalement \mathcal{C}^2 .
3. La troisième méthode consiste à prendre la dérivée seconde de l'interpolant spline cubique des échantillons $u[k]$. On a donc $P(z) = 6/(z + 4 + z^{-1})$ et $\varphi = (\beta^3)''$. Comme on a la propriété $(\beta^3)''(t) = \beta^1(t-1) - 2\beta^1(t-1) + \beta^1(t+1)$, on peut aussi implémenter la méthode en utilisant $P(z) = 6(z - 2 + z^{-1})/(z + 4 + z^{-1})$ et $\varphi = \beta^1$. On remarque que cette troisième méthode est hybride entre les deux précédentes, avec le générateur φ de la première, donc une reconstruction linéaire par morceaux globalement \mathcal{C}^0 , et le préfiltre de la seconde méthode.
4. La dernière méthode, par ε -différentiation, consiste à appliquer une différence finie à l'interpolant spline cubique $f_{\text{app}}(t)$ des échantillons $u[k]$:

$$f_{\text{der}}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(f_{\text{app}}(t - \varepsilon) - 2f_{\text{app}}(t) + f_{\text{app}}(t + \varepsilon) \right), \quad (25)$$

pour un certain réel $\varepsilon > 0$. Cette méthode est intéressante pour les applications où il est nécessaire de reconstruire en même temps une estimée de $s(t)$ et de $s''(t)$, par exemple pour la visualisation de données 3D par rendu volumique [1]. On remarque que si $\varepsilon \rightarrow 0$, f_{der} tend vers la dérivée analytique f_{app}'' , ce qui correspond à la méthode 3) précédente. De plus, si $\varepsilon = 1$, par commutativité de la convolution, la méthode est équivalente à la méthode 2). Dans le cas général, la méthode revient formellement à prendre $P(z) = 6/(z + 4 + z^{-1})$ et $\varphi(t) = (\beta^3(t - \varepsilon) - 2\beta^3(t) + \beta^3(t + \varepsilon))/\varepsilon^2$. La fonction reconstruite f_{der} est une spline cubique par morceaux, globalement \mathcal{C}^2 , mais avec des noeuds non uniformes. La question se pose du choix optimal de ε . Nous allons voir que le noyau d'erreur fournit un moyen simple de déterminer cette valeur.

On remarque tout d'abord que les quatre méthodes ont un ordre d'approximation égal à 2. En effet, un développement de Taylor à l'origine nous donne $E(\omega)^{1/2} \sim C\omega^2$, où la constante asymptotique C vaut respectivement, pour

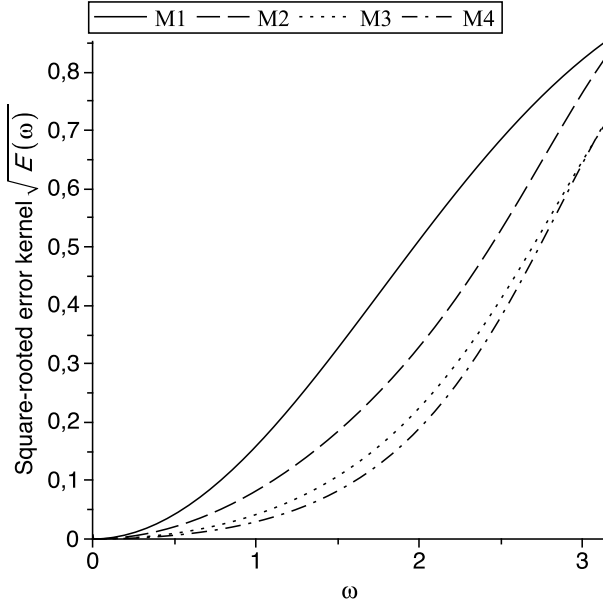


FIGURE 2 – Racine carrée du noyau d’erreur fréquentiel $E(\omega)$ pour les méthodes de reconstruction 1 à 4, notées M1 à M4 respectivement, décrites en section 5. Seules les valeurs dans la demi-bande de Nyquist $\omega \in [0, \pi]$ sont représentées, car $E(\omega)$ est symétrique en 0.

les trois premières méthodes, $C = \frac{\sqrt{105}}{60} \approx 0.17$, $C = \frac{1}{12} \approx 0.08$, $C = \frac{\sqrt{5}}{60} \approx 0.04$. Pour la quatrième méthode, la valeur de C dépend de ε . Pour $\varepsilon \in]0, 1/2]$, on a :

$$C^2 = \frac{1}{720} - \frac{1}{72}\varepsilon^2 + \frac{31}{1260}\varepsilon^3 - \frac{1}{180}\varepsilon^4 \quad (26)$$

et C prend des valeurs supérieures pour $\varepsilon > 1/2$. On peut donc choisir ε de manière à minimiser C , ce qui nous donne la valeur optimale

$$\varepsilon_o = \frac{93}{56} - \frac{1}{56}\sqrt{4729} \approx 0.43, \quad (27)$$

pour laquelle $C \approx 6.10^{-4}$.

Nous avons représenté en figure 2 les noyaux d’erreur associés aux quatre méthodes, avec $\varepsilon = \varepsilon_o$ pour la méthode 4). On voit que la hiérarchie des méthodes par rapport à leur constante d’approximation C est respectée. En d’autres termes, la minimisation de C , qui est une contrainte asymptotique en $\omega = 0$, fournit un noyau d’erreur dont le bon comportement s’étend dans toute la bande de Nyquist $\omega \in [-\pi, \pi]$. Ce constat, qui n’est pas attendu *a priori*, a déjà été fait dans le cadre de l’interpolation [6, 7, 8, 23]. Ainsi, la minimisation de la constante asymptotique est une manière simple et efficace de concevoir des méthodes de reconstruction performantes. L’application de cette méthodologie à la reconstruction de dérivées est nouvelle et l’auteur n’est pas au courant, par exemple, de résultat semblable à (27) dans la littérature.

Il est intéressant de déterminer une fonction ϕ correspondant à la méthode 4). En effet, les translatés de φ ne

forment pas une base de Riesz. On peut définir ϕ par

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{2 \cos(\omega) - 2} = \frac{2 \cos(\varepsilon\omega) - 2}{\varepsilon^2 (2 \cos(\omega) - 2)} \hat{\beta}^3(\omega), \quad (28)$$

qui vérifie bien les conditions de Strang-Fix d’ordre 2. En fait, on peut montrer que $\phi = \beta^1 * \beta_\varepsilon^1$ où $\beta_\varepsilon^1(t) = \frac{1}{\varepsilon} \beta^1(\frac{t}{\varepsilon})$. ϕ est à support compact dans $[-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, cubique par morceaux, globalement C^2 .

Une autre remarque importante concerne la méthode 3). On s’aperçoit que $E = E_{\min}$ et, en effet, f_{der} est la projection orthogonale de s'' dans $\mathcal{V}_T(\beta^1)$. En d’autres termes, la méthode fournit la meilleure représentation linéaire par morceaux possible de la fonction s'' , bien que cette dernière soit inconnue. De manière générale, il est possible d’obtenir la projection orthogonale de $s^{(N)}$ dans l’espace spline $\mathcal{V}_T(\beta^{N-1})$ à partir d’échantillons ponctuels de s , pour tout $N \geq 1$, ce qui constitue une propriété remarquable des fonctions splines.

Enfin, on note que les espaces de reconstruction des méthodes 1), 3), 4) ont un ordre d’approximation égal à 2, alors que l’espace spline cubique de la méthode 2) a un ordre égal à 4. Donc pour la méthode 2), le préfiltre p n’exploite que partiellement les capacités de représentation de $\mathcal{V}_T(\beta^3)$. On peut proposer un autre préfiltre afin d’obtenir une méthode d’ordre 4. D’après (24), cela est équivalent à avoir

$$\hat{p}(\omega) = -\omega^2 \hat{\beta}_d^3(\omega) + O(\omega^6) = -\omega^2 - \frac{1}{6}\omega^4 + O(\omega^6). \quad (29)$$

Par exemple, $P(z) = 120(z - 2 + z^{-1}) / (66 + 26(z + z^{-1}) + z^2 + z^{-2})$ convient, et la méthode revient alors à calculer la dérivée seconde de l’interpolant spline de degré 5 des échantillons $u[k]$.

6 Conclusion

Nous avons présenté un formalisme générique en domaine de Fourier, qui permet d’évaluer la qualité des méthodes de reconstruction de dérivées. Dans nos prochains travaux, nous approfondirons l’utilisation de cette théorie pour la conception de méthodes de reconstruction performantes. L’étude du cas où les mesures sont bruitées devra aussi être menée [26, 14].

L’extension à la reconstruction de dérivées partielles de signaux multi-dimensionnels est immédiate, le noyau d’erreur fréquentiel étant défini pour les signaux échantillonnés sur des treillis arbitraires [23]. Le développement de méthodes de différences finies et la résolution numériques d’EDPs sont des champs d’applications prometteurs.

Annexes

Preuve de l’équivalence entre (9),(10),(11)

Nous commençons par montrer que (10) \Leftrightarrow (11). Soit $n \in 0 \dots N - 1$. On définit $y_n = (y_n[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ par $y_n[k] = \hat{\psi}^{(n)}(2k\pi)$. Alors, $y_n[k] = 0 \forall k \Leftrightarrow \hat{y}_n = 0 \Leftrightarrow \sum_k (t - k)^n \psi(t - k) = 0 \forall t$, où la dernière équivalence est la

formule de sommation de Poisson appliquée à la fonction $t^n \psi(t)$. Ainsi, (11) $\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q(t-k) \psi(t-k) = 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall Q \in \mathcal{P}^{N-1}$. Cette expression est équivalente à (10) en posant, pour chaque $t, Q(X) = P(t-X)$. \square

Nous montrons ensuite que (10) \Rightarrow (9). On suppose (10). Soit $s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n t^n \in \mathcal{P}^{N-1}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On introduit la fonction $g(t) = \frac{1}{T} s(t) \tilde{\varphi}(k - \frac{t}{T})$. Alors, $u[k] = \hat{g}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n j^n \frac{d^n}{d\omega^n} \{e^{-j\omega T k} \widehat{\tilde{\varphi}}(T\omega)^*\}_{|\omega=0}$ est un polynôme en k de degré $N-1$. En appliquant (10) à ce polynôme P , on obtient $f_{\text{der}} = 0$. \square

Nous ne donnons pas les détails de (9) \Rightarrow (10). La preuve consiste, pour $P \in \mathcal{P}^{N-1}$ donné, à exhiber un polynôme $s \in \mathcal{P}^{N-1}$ délivrant les mesures $u[k] = P(k)$, ce qui est toujours possible.

Preuves des résultats de la section 3

Nous prouvons tout d'abord le lemme. Définissons la fonction $s_T(t) = s(Tt)$. Alors, pour tout $n \in 1 \dots N, s_T^{(n)} * \beta_+^0(t) = \int_{t-1}^t s^{(n)}(x) dx = s_T^{(n-1)}(t) - s_T^{(n-1)}(t-1) = s_T^{(n-1)} * (\delta - \delta(\cdot - 1))(t)$. Par récurrence, en utilisant la propriété $\beta_+^n = \beta_+^{n-1} * \beta_+^0$, on obtient : $s_T^{(N)} * \beta_+^{N-1} * \tilde{\varphi} = s_T * (\delta - \delta(\cdot - 1))^N * \tilde{\varphi}$. Par conséquent, puisque $u[k] = s_T * \tilde{\varphi}(k)$, on a $s_T^{(N)} * \tilde{\varphi}(k) = T^N \int_{\mathbb{R}} s^{(N)}(t) \tilde{\phi}(k - \frac{t}{T}) d\frac{t}{T} = u * d^N[k]$. \square

Les théorèmes 1 et 2 sont adaptés de [21, Théorème 1] et [21, Théorème 3], respectivement, en faisant les substitutions $s \rightarrow s^{(N)}, u \rightarrow v, \varphi \rightarrow \phi, \tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{\phi}, p \rightarrow h$. Ainsi, les théorèmes sont satisfaits avec l'expression suivante de $E(\omega)$ en (13) :

$$E(\omega) = 1 - \frac{|\hat{\phi}(\omega)|^2}{\hat{a}_\phi(\omega)} + \hat{a}_\phi(\omega) |\hat{\phi}(\omega) \hat{h}(\omega) - \hat{\phi}_d(\omega)|^2. \quad (30)$$

Il reste à montrer que cette expression est équivalente à (14). Il suffit pour cela de substituer dans (30) les égalités $\hat{\phi} = \frac{\hat{q}}{\hat{q}} \hat{\phi}, \hat{a}_\phi = |\frac{\hat{q}}{\hat{q}}|^2 \hat{a}_\phi, \hat{\phi} = \widehat{\tilde{\varphi} \cdot \beta_+^{N-1}}$ avec $\beta_+^{N-1}(\omega) = \hat{d}^N(\omega)/(j\omega)^N, \hat{q} = \hat{h} \cdot \hat{d}^N$. \square

Remerciements

Ce travail a été effectué en partie dans le groupe de recherche *Graphics, Usability and Visualization* (GrUVi) de l'université Simon Fraser (SFU) à Vancouver, Canada. L'auteur y a séjourné deux mois sur invitation de Torsten Möller, grâce à un financement du *Computer Science Department* de SFU et du NSERC.

Références

[1] G. Kindlmann et J. W. Durkin, "Semi-automatic generation of transfer functions for direct volume rendering", *Proc. of the IEEE Symposium on Volume Visualization (VVS)*, 1998, p. 79–86.
[2] P. Thévenaz, T. Blu et M. Unser, "Interpolation revisited", *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 19, n° 7, p. 739–758, Juil. 2000.

[3] M. Unser, "Sampling—50 Years after Shannon", *Proc. IEEE*, vol. 88, n° 4, p. 569–587, Avr. 2000.
[4] T. M. Lehmann, C. Gönnér et K. Spitzer, "Survey : Interpolation methods in medical image processing", *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 18, n° 11, p. 1049–1075, Nov. 1999.
[5] E. Meijering, W. Niessen et M. Viergever, "Quantitative evaluation of convolution-based methods for medical image interpolation", *Medical Image Analysis*, vol. 5, n° 2, p. 111–126, Juin 2001.
[6] T. Blu, P. Thévenaz et M. Unser, "MOMS : Maximal-order interpolation of minimal support", *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 10, n° 7, p. 1069–1080, Juil. 2001.
[7] T. Blu, P. Thévenaz et M. Unser, "Linear interpolation revitalized", *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 13, n° 5, p. 710–719, Mai 2004.
[8] L. Condat, T. Blu et M. Unser, "Beyond interpolation : Optimal reconstruction by quasi-interpolation", *Proc. of IEEE ICIP*, Sept. 2005, vol. 1, p. 33–36.
[9] I. Selesnick, "Maximally flat low-pass digital differentiators", *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 49, n° 3, p. 219–223, Mars 2002.
[10] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise", *Proc. of the Inst. of Radio Eng.*, vol. 37, n° 1, p. 10–21, 1949.
[11] M. J. Bentum, T. Malzbender et B. B. Lichtenbelt, "Frequency analysis of gradient estimators in volume rendering", *IEEE Trans. Vis. Comput. Graphics*, vol. 2, n° 3, p. 242–254, Sept. 1996.
[12] M. Unser et J. Zerubia, "A generalized sampling theory without band-limiting constraints", *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 45, n° 8, p. 959–969, Août 1998.
[13] M. Unser et T. Blu, "Generalized smoothing splines and the optimal discretization of the Wiener filter", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, n° 6, p. 2146–2159, Juin 2005.
[14] Y. C. Eldar et M. Unser, "Nonideal sampling and interpolation from noisy observations in shift-invariant spaces", *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 54, n° 7, p. 2636–2651, Juil. 2006.
[15] S. Ramani, D. Van De Ville, T. Blu et M. Unser, "Nonideal sampling and regularization theory", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, n° 3, p. 1055–1070, Nov. 2008.
[16] M. E. Goss, "An adjustable gradient filter for volume visualization image enhancement", *Proc. of Graphics Interface*, 1994, p. 67–74.
[17] T. Theußl, H. Helwig et E. Gröller, "Mastering windows : improving reconstruction", *Proc. of the IEEE Symposium on Volume Visualization (VVS)*, 2000, p. 101–108.

- [18] T. Möller, R. Machiraju, Klaus Mueller et Roni Yagel, "Evaluation and design of filters using a Taylor series expansion", *IEEE Trans. Vis. Comput. Graphics*, vol. 3, n° 2, p. 184–199, April-June 1997.
- [19] G. Strang et G. Fix, "A Fourier analysis of the finite element variational method", *Constructive Aspects of Functional Analysis*, Cremonese, Rome, Italy, 1971, p. 796–830.
- [20] C. de Boor et G. Fix, "Spline approximation by quasi-interpolants", *J. Approx. Theory*, vol. 8, p. 19–45, 1973.
- [21] T. Blu et M. Unser, "Quantitative Fourier analysis of approximation techniques : Part I-interpolators and projectors", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, n° 10, p. 2783–2806, Oct. 1999.
- [22] M. Jacob, T. Blu et M. Unser, "Sampling of periodic signals : A quantitative error analysis", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, n° 5, p. 1153–1159, Mai 2002.
- [23] L. Condat et D. Van De Ville, "Quasi-interpolating spline models for hexagonally-sampled data", *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 16, n° 5, p. 1195–1206, Mai 2007.
- [24] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, 1999.
- [25] M. Unser et T. Blu, "Wavelet theory demystified", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 51, n° 2, p. 470–483, Fév. 2003.
- [26] D. den Hertog, R. Brekelmans, L. Driessen et H. Hamers, "Gradient estimation schemes for noisy functions", Tech. Rep. 12, Tilburg University, Center for Economic Research, 2003.