

コンシステント標本化定理を用いた画像拡大の一手法

Image magnification method based on a consistent sampling theorem

平林 晃¹, Laurent Condat²

Akira Hirabayashi (a-hira@yamaguchi-u.ac.jp)

¹ 山口大学 工学部 知能情報工学科

Dept. Information Science and Engineering, Yamaguchi University

² グルノーブル工科大学 画像信号研究室

Laboratory of Images and Signals, INPG University (France)

あらまし

画像拡大に対してこれまで多くの手法が提案されてきたが、共3次内挿法は依然、標準的な手法として頻りに利用されている。この理由は、計算が簡単であることに加え、事前情報や参照データを必要としないからである。こうした簡便さの一方で、倍率が高いほど拡大画像が不鮮明になるという問題点がある。この問題を解決するために、本論文では、第1著者が提案したコンシステント標本化定理を利用した新しい画像拡大法を提案する。この標本化定理では、事前に特定した重要成分を完全再構成することができる。この重要成分にDCT基底の低周波成分を指定することにより、共3次内挿法以上に高精度な画像拡大を、より少ない計算量で実現できることを示す。

Abstract

Image magnification has been attracting a great deal of attention for long, and many approaches have been proposed to date. Nevertheless, bicubic interpolation is still the standard approach because it can be easily computed, and does not require *a priori* knowledge nor plenty of reference data. Despite the convenience, the images enlarged bicubically are blurry, especially for large magnification factors. In this paper, we propose a new method based on a consistent sampling theorem which perfectly reconstructs significant components in input images by specifying them in advance. We show that, by choosing the low frequency components of the DCT basis as the significant components, the proposed method performs better than bicubic interpolation with even less amount of computation.

1 はじめに

画像拡大は基本的な画像処理技術の一つである。関心領域の拡大に限らず、プリンタやディスプレイなどのデバイスに依存した解像度への変換など、様々な場面で必要となる技術である。

これまでなされてきた多くの研究の中でも [1], 最近注目を集めている手法は大量の参照データを用いる方法である [2], [3]. これらの手法では高い精度の拡大画像を期待できる一方で、常に十分な画像データを利用できるとは限らないという欠点がある。

これに対して共3次内挿法は、処理画像に関する前提知識や参照データが必要ないことに加え、計算量が比較的少ないといった利点があり、画像拡大の標準的手法の一つになっている。

文献 [4] に基づいて共3次内挿法を概説する。高解像度画像の着目画素値を求めるために、同手法では周辺の 4×4 画素を用いる。横（縦）方向に内挿を行った後、更に縦（横）方向の内挿を行う。縦横2回の処理は同一で、以下のとおりである。補間には3次多項式が用いられる。同多項式には4つの未知数がある。これらを決定するための条件は、4点の中の内側の2点を通過すること、およびこれらの点における傾きがそれぞれの両隣の画素値を結ぶ直線の傾きに一致することである。こうして求めた3次多項式の所望の位置における値が求める画素値となる。これを横（縦）方向4組の画素値に対して行い、得られた4つの画素値を用いて縦（横）方向の3次多項式を求め、最終的に着目画素値を求めるのである。

本手法の問題点は、拡大倍率が大きくなればなるほど画像が不鮮明になってしまうということである。この問題点は、共3次内挿法の以下の考え方に起因すると説明できる。

1. 拡大倍率に関わらず 3 次多項式を用いること .
2. 画素のサンプリング過程が考慮されていないこと .
3. 画素数が固定されていること .
4. 求めた多項式は両端の画素値を再現しないこと .

本論文では、これらの考え方をより一般化することにより、共 3 次内挿法の利点である簡便性を維持しつつ、より高精度の拡大画像を求めることができる方法を提案する .

2 数学的準備

共 3 次内挿法における 4×4 画素のように、高解像度画像の画素値を求めるために用いる画素数を $N_x \times N_y$ で表す . これらの画素が占める領域を考え、その左上に原点を設定し、水平右向きに x 軸、垂直下向きに y 軸を考える . 一般性を失うことなく画素間隔を 1 と考えれば、領域幅の大きさは N_x, N_y となる . 各画素の中心を画素位置と呼び、 (x_{n_x}, y_{n_y}) ($n_x = 1, 2, \dots, N_x, n_y = 1, 2, \dots, N_y$) で表す :

$$x_{n_x} = \frac{2n_x - 1}{2}, \quad y_{n_y} = \frac{2n_y - 1}{2}$$

領域 $[0, N_x] \times [0, N_y]$ で定義された 2 乗可積分の連続画像の全体を H で表す . H の元 f, g に対して内積を

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{N_x N_y} \int_0^{N_x} \int_0^{N_y} f(x, y) g(x, y) dx dy$$

で定義する . ノルムは $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ で定義される .

3 新しい画像拡大法

本節では、第 1 節で述べた共 3 次内挿法の各考え方をより一般化することにより、新しい画像拡大法を提案する .

3.1 拡大倍率に応じた補間関数

連続画像 $f(x, y)$ を近似するモデル関数を $\tilde{f}(x, y)$ で表す . 共 3 次内挿法では $\tilde{f}(x, y)$ に、拡大倍率に関わらず常に 3 次多項式を用いていた . これに対して、本稿では以下の線形モデルを用いる :

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{k_x=1}^{K_x} \sum_{k_y=1}^{K_y} c_{k_x, k_y} \varphi_{k_x, k_y}(x, y) \quad (1)$$

ここで、項数 K_x, K_y は拡大倍率 M_R を用いて

$$K_x = \lfloor M_R N_x \rfloor, \quad K_y = \lfloor M_R N_y \rfloor \quad (2)$$

で与えられる . 記号 $\lfloor r \rfloor$ は r を超えない最大の整数を表す . 式 (1), (2) により、推定画像が目標画像の細部も表現できるようになり、より高精度の拡大画像を期待できる . 一方で、モデルが複雑になれば解が不安定になることは容易に想像がつく . この問題を解決するためある種の正則化を行う . 詳細は第 3.4 節で説明する .

第 $k_x + (k_y - 1) K_x$ 番目の要素が c_{k_x, k_y} である $K_x K_y$ 次元ベクトルを c で表す :

$$c = (c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{K_x, K_y})^T \quad (3)$$

作用素 A_r を

$$A_r f = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_{1,1} \rangle \\ \langle f, \varphi_{2,1} \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_{K_x, K_y} \rangle \end{pmatrix} \quad (4)$$

と定義する . 共役作用素 A_r^* に関して、式 (1), (3), (4) より

$$\tilde{f} = A_r^* c \quad (5)$$

が成立する . すなわち、 A_r^* は再構成作用素となっている . この作用素の値域 $\mathcal{R}(A_r^*)$ は推定結果が含まれる空間であり、重要な役割を担っている .

3.2 サンプリング過程

共 3 次内挿法では画素値 d_{n_x, n_y} として、連続画像 $f(x, y)$ の標本点 (x_{n_x}, y_{n_y}) における値 $f(x_{n_x}, y_{n_y})$ が用いられている (理想サンプリング) . しかし、CCD や CMOS などの実際の撮像デバイスには空間的広がりがあり、またデバイス上の位置によっても受光感度が異なっている . 本稿ではこうした特性を考慮した一般化サンプリングを考える . すなわち、画素値は連続関数とサンプリング関数 ψ_{n_x, n_y} との内積

$$\begin{aligned} d_{n_x, n_y} &= \langle f, \psi_{n_x, n_y} \rangle \\ &= \frac{1}{N_x N_y} \int_0^{N_x} \int_0^{N_y} f(x, y) \psi_{n_x, n_y}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

で与えられる場合を考える .

サンプリング関数 ψ_{n_x, n_y} は移動不変であると仮定されることが多い . すなわち、ある関数 $\psi(x, y)$ を用いて

$$\psi_{n_x, n_y}(x, y) = \psi(x - x_{n_x}, y - y_{n_y}) \quad (6)$$

の成立が仮定される．後述のシミュレーションでも移動不変性を仮定することにする．

サンプリング作用素 A_s を

$$A_s f = \begin{pmatrix} \langle f, \psi_{1,1} \rangle \\ \langle f, \psi_{2,1} \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \psi_{N_x, N_y} \rangle \end{pmatrix} \quad (7)$$

と定義する．この作用素で変換して 0 になる f の集合は零空間と呼ばれ， $\mathcal{N}(A_s)$ と表記される．とりわけ， $\mathcal{R}(A_r^*)$ との共通部分 $\mathcal{R}(A_r^*) \cap \mathcal{N}(A_s)$ は A_s が 0 に変換してしまう推定モデルの集合であり，後の議論で重要になる．

3.3 画素数

共 3 次内挿法では，処理に用いる低解像度画像の画素数は常に 4×4 に限定されていた．この理由は 3 次多項式を一意に決定するためには 4 データが必要であるからと考えられる．これに対して，提案手法では画像推定モデルに式 (1) を用い，更に正則化を行うので，そのような拘束はない．そこで本論文では， $N_x = N_y = 3, 4, 5, 6$ である場合を考える．なお後述の式 (15) に示すように，提案手法では 1 画素値を求めるために $N_x N_y$ 回の乗算が必要である．従って， $N_x = 4$ の場合の計算量が共 3 次内挿法と同じであり， $N_x = N_y = 3$ の場合はより少ない計算量になっている．

3.4 評価基準

共 3 次内挿法では横（縦）方向 4 画素の中で，内側の 2 画素を通過し，更にこれら 2 点における傾きがその両脇の画素値を結ぶ直線の傾きに等しくなるように 3 次多項式を決定していた．この評価基準は N_x, N_y の変化に対する汎用性に欠けるものである．そこで，本研究では以下の 2 つの条件を同時に満たすという評価基準を考える．

1. 推定結果を再び観測した結果がもとの観測結果に一致する．
2. 事前に特定した重要成分は完全に再構成する．

順に説明する．まず第 1 基準は，式で表現すれば

$$\langle \tilde{f}, \psi_{n_x, n_y} \rangle = \langle f, \psi_{n_x, n_y} \rangle \quad (= d_{n_x, n_y}) \quad (8)$$

となる．共 3 次内挿法では両端の画素に対してこの条件は成立していなかったが，それらの画素に対しても本研究ではこの条件を課すことにする．

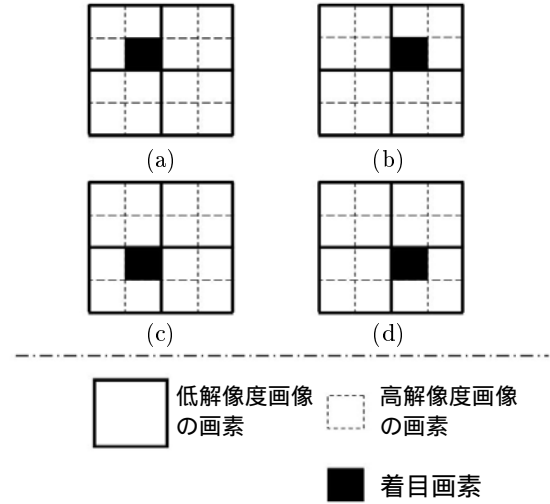


図 1: 縦横 2 倍の拡大を行う場合の低解像度画像の 2×2 画素における高解像度画像の画素の相対位置．

次に第 2 基準を説明する．画像推定モデルの項数 $K_x K_y$ は， $M_R > 1$ より画素数 $N_x N_y$ 以上であり，真に大である場合には，第 1 基準だけでは推定画像を一意に決定できない．そこで，ある種の正則化を行うために第 2 基準を考える．再構成関数 $\{\varphi_{k_x, k_y}\}_{k_x=1}^{K_x} \{k_y=1}^{K_y}$ の線形結合であり A_s による観測結果が 0 でない，すなわち $\mathcal{R}(A_r^*)$ に含まれるが $\mathcal{N}(A_s)$ には含まれない重要成分を $\{\phi_m^{(i)}\}_{m=1}^M$ ($M \leq N_x N_y$) で表す：

$$\phi_m(x, y) = \sum_{k_x=1}^{K_x} \sum_{k_y=1}^{K_y} c_{k_x, k_y}^{(m)} \varphi_{k_x, k_y}(x, y) \quad (9)$$

これらの成分が特定できている場合を考える．

仮に， $M = N_x N_y$ であれば， $\{\phi_m^{(i)}\}_{m=1}^M$ の線形結合で式 (8) を満たすものは一意に定まる．一方， $M < N_x N_y$ である場合には自由度がまだ残っている．そこで， $\mathcal{N}(A_s)$ に含まれない $\mathcal{R}(A_r^*)$ の $N_x N_y - M$ 個の成分 $\{\phi_m^{(c)}\}_{m=M+1}^{N_x N_y}$ を決定し，重要成分 $\{\phi_m^{(i)}\}_{m=1}^M$ とあわせた合計 $N_x N_y$ 個の関数の線形結合で \tilde{f} を推定することにする．成分 $\{\phi_m^{(c)}\}_{m=M+1}^{N_x N_y}$ の決め方には様々な考え方があるが，ここでは $\mathcal{N}(A_s)$ と $\{\phi_m^{(i)}\}_{m=1}^M$ で張られる部分空間の両方に直交するように決定する．

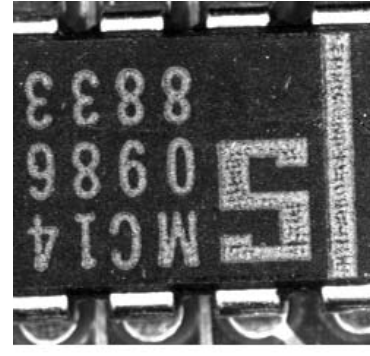
実は，以上述べてきた条件を満たす式 (1) の $\tilde{f}(x, y)$ を構成する問題は，第 1 著者が文献 [6] で論じた標本化定理の問題になっている．そこで詳しく述べられているように， \tilde{f} は $\mathcal{N}(A_s)$ に沿った $\{\phi_m^{(i)}\}_{m=1}^M$ および $\{\phi_m^{(c)}\}_{m=M+1}^{N_x N_y}$ で張られる部分空間への f の斜射影になっている．このことが，重要成分を完全再構成できることの本質的な理由である．この斜射影を求めるためには，式 (3) のベクトル c を次のように決定すれば



(a) Girl



(b) Airplane



(c) Text

図 2: シミュレーションで用いた標準画像.

よい．画素値 d_{n_x, n_y} が第 $n_x + (n_y - 1)N_x$ 番目の要素である $N_x N_y$ 次元ベクトルを d で表す．再構成関数と標本化関数の相互相関行列を B で表し，式 (9) の係数 $c_{k_x, k_y}^{(m)}$ からなる $K_x K_y \times M$ 行列を C で表す：

$$B = \begin{pmatrix} \langle \varphi_{1,1}, \psi_{1,1} \rangle & \langle \varphi_{2,1}, \psi_{1,1} \rangle & \cdots & \langle \varphi_{K_x, K_y}, \psi_{1,1} \rangle \\ \langle \varphi_{1,1}, \psi_{2,1} \rangle & \langle \varphi_{2,1}, \psi_{2,1} \rangle & \cdots & \langle \varphi_{K_x, K_y}, \psi_{2,1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_{1,1}, \psi_{N_x, N_y} \rangle & \langle \varphi_{2,1}, \psi_{N_x, N_y} \rangle & \cdots & \langle \varphi_{K_x, K_y}, \psi_{N_x, N_y} \rangle \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1}^{(1)} & c_{1,1}^{(2)} & \cdots & c_{1,1}^{(M)} \\ c_{2,1}^{(1)} & c_{2,1}^{(2)} & \cdots & c_{2,1}^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{K_x, K_y}^{(1)} & c_{K_x, K_y}^{(2)} & \cdots & c_{K_x, K_y}^{(M)} \end{pmatrix}$$

定理 1 [6] 行列 U を

$$U = B^* + CC^\dagger B^* - B^\dagger BC(C^* B^\dagger BC)^\dagger C^* B^*$$

と定義し，

$$c = U(BU)^\dagger d \quad (10)$$

によって求まる係数 $\{c_{k_x, k_y}\}_{k_x=1}^{K_x} \{k_y=1}^{K_y}$ を用いて式 (1) で求まる \tilde{f} は，式 (8) を満たし，かつ重要成分 $\{\phi_m^{(i)}\}_{m=1}^M$ および直交成分 $\{\phi_m^{(c)}\}_{m=M+1}^{N_x N_y}$ を完全再構成する．

重要成分に関する情報を用いることができない場合は $C = 0$ になるので， $U = B^*$ となり，式 (10) は

$$c = B^\dagger d \quad (11)$$

となる．式 (11) は，Eldar が文献 [7] で論じた標本化定理を不足標本化状況へ適用したのようになっており，式 (10) は式 (11) を拡張したのになっている．

適切な $\{\phi_m^{(i)}\}_{m=1}^M$ を設定すればするほど推定精度は高くなる．第 4 節では DCT 基底の低周波成分を $\{\phi_m^{(i)}\}_{m=1}^M$ に用いることにより，共 3 次内挿法以上に高精度な画像拡大が，より少ない計算量で実現することを示す．

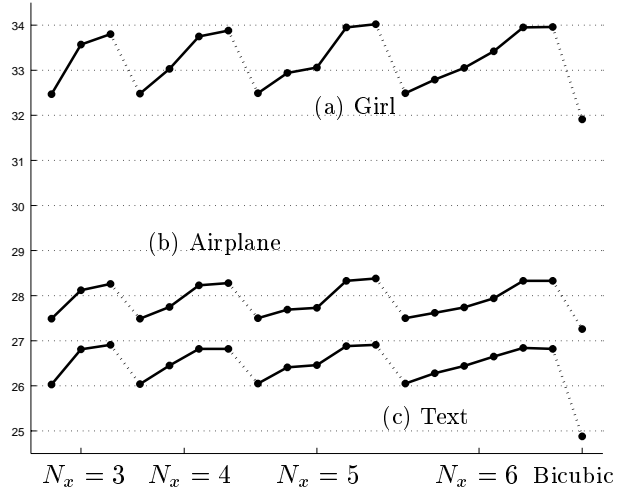


図 3: PSNR.

3.5 画像拡大アルゴリズム

求めた推定連続画像 \tilde{f} から高解像度デジタル画像の画素値を求める方法を述べる．第 2 節で定義した座標系での高解像度画像の画素位置を (γ, η) で表す．低解像度画像と同様に，サンプリング特性は移動不変である場合を考える．すなわち，関数 $\xi_{\gamma, \eta}$ を

$$\xi_{\gamma, \eta}(x, y) = \xi(x - \gamma, y - \eta) \quad (12)$$

と定義し，画素値 $h_{\gamma, \eta}$ を

$$h_{\gamma, \eta} = \langle \tilde{f}, \xi_{\gamma, \eta} \rangle \quad (13)$$

と， \tilde{f} との内積で求める．式 (5), (10) より，

$$h_{\gamma, \eta} = \langle d, \alpha^{(\gamma, \eta)} \rangle \quad (14)$$

となる．ここで， $\alpha^{(\gamma, \eta)}$ は

$$\alpha^{(\gamma, \eta)} = (U^* B^*)^\dagger U^* A_r \xi_{\gamma, \eta}$$

と定義される $N_x N_y$ 次元ベクトルである．式 (14) より， $h_{\gamma, \eta}$ は画素値 d_{n_x, n_y} と $\alpha^{(\gamma, \eta)}$ の成分 $\alpha_{n_x + (n_y - 1)N_x}^{(\gamma, \eta)}$



(a) 提案手法 ($N_x = 5, M = 25$)

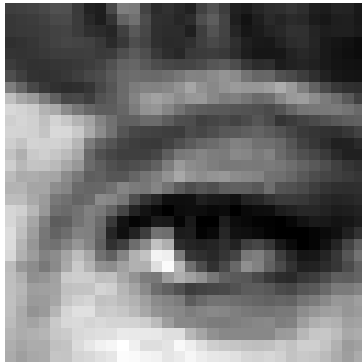


(b) 提案手法 ($N_x = 3, M = 9$)

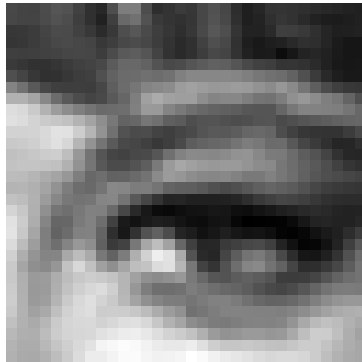


(c) 共 3 次内挿法

図 4: シミュレーション結果



(a) 現画像



(b) 提案手法 ($N_x = 5, M = 25$)



(c) 共 3 次内挿法

図 5: シミュレーション結果の拡大図

との積和演算で求めることができる：

$$h_{\gamma,\eta} = \sum_{n_x=1}^{N_x} \sum_{n_y=1}^{N_y} \alpha_{n_x+(n_y-1)N_x}^{(\gamma,\eta)} d_{n_x,n_y} \quad (15)$$

拡大倍率を定めれば、高解像度画像の画素位置 (γ, η) は数種類のみになる。例えば縦横 2 倍の拡大を行う場合、 $N_x = N_y = 2$ であれば図 1 に示すように、 (γ, η) は 4 種類しか現れない。従って、これらの座標に対応する係数ベクトルをあらかじめ求めておき、高解像度画像の画素位置 (γ, η) によって使い分け、式 (15) の積和演算を行うことにより画素値を求めることができる。

以上より、提案する拡大アルゴリズムは次のようになる。

Algorithm 1 1. 係数ベクトル $\alpha^{(\gamma,\eta)}$ をすべての (γ, η) に対して求める。

2. 以下のステップを高解像度画像のすべての画素に対して実行する。

(1) 着目している高解像度画像の画素周辺の低解像度画像の $N_x N_y$ 個の画素を特定する。

(2) ステップ 1 で求めてある係数ベクトルの中から用いる $\alpha^{(\gamma,\eta)}$ を選択する。

(3) 式 (15) の積和演算を実行する。

4 計算機シミュレーション

提案手法によるシミュレーション結果を示す。用いた画像は図 2 に示す 3 種類の標準画像である。各画像の周辺 4 画素平均によるダウンサンプリングを行い、提案手法により拡大を行った。

再構成関数 $\{\varphi_{k_x, k_y}\}_{k_x=1}^{K_x} \{k_y=1\}^{K_y}$ には、DCT の基底関数を用いた。すなわち、 $\varphi_{k_x}, \varphi_{k_y}$ を

$$\varphi_{k_x}(x) = \begin{cases} 1 & (k_x = 1) \\ \sqrt{2} \cos \frac{(k_x - 1)\pi x}{l_x} & (k_x = 2, 3, \dots, K_x) \end{cases}$$

$$\varphi_{k_y}(y) = \begin{cases} 1 & (k_y = 1) \\ \sqrt{2} \cos \frac{(k_y - 1)\pi y}{l_y} & (k_y = 2, 3, \dots, K_y) \end{cases}$$

と定義し，

$$\varphi_{k_x, k_y}(x, y) = \varphi_{k_x}(x)\varphi_{k_y}(y)$$

である場合を考える．サンプリング関数には， $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \begin{cases} p_L & (|x| \leq r_L) \\ 0 & (|x| > r_L) \end{cases}$$

と定義し，式 (6) の右辺の関数 $\psi(x, y)$ が

$$\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

である場合を考えた．すなわち，幅 $2r_L$ の受光領域内では一定値 p_L の特性をもつ場合を考える．これと同様に，式 (12) の関数 $\xi(x, y)$ には， $\xi(x)$ を

$$\xi(x) = \begin{cases} p_H & (|x| \leq r_H) \\ 0 & (|x| > r_H) \end{cases} \quad (16)$$

と定義し，

$$\xi(x, y) = \xi(x)\xi(y) \quad (17)$$

である場合を考えた．パラメータ値には， $r_L = 1/2$ ， $p_L = 1/2r_L$ ， $r_H = 1/4$ ， $p_H = 1/2r_H$ を用いた．

重要成分 $\{\phi_m^{(i)}\}_{m=1}^M$ には，再構成関数の低周波成分を用いた．具体的には，それぞれの N_x に対して最大 $N_x N_y$ 個の成分を指定できるので，各 $N_x = 3, 4, 5, 6$ に対して $\{\varphi_{1,1}\} (M=1)$ ， $\{\varphi_{k_x, k_y}\}_{k_x=1}^2 \{k_y=1}^2 (M=4)$ ， \dots ， $\{\varphi_{k_x, k_y}\}_{k_x=1}^{N_x} \{k_y=1}^{N_y} (M=N_x^2)$ の N_x 種類の集合を $\{\phi_m^{(i)}\}_{m=1}^M$ に用いた．比較のために，共 3 次内挿法を用いた拡大も行った．

提案手法および共 3 次内挿法で得られた拡大画像の PSNR を図 3 に示す．横軸は拡大法の違いを示し，左から $N_x = 3, 4, 5, 6$ それぞれにおける $M = 1, 4, \dots, N_x^2$ の場合の提案手法，および右端が共 3 次内挿法である．縦軸がそれぞれの手法による拡大画像の PSNR を示す．この結果より，いずれの画像においても提案手法が共 3 次内挿法を上回っていることがわかる．また，提案手法の中でも N_x, M の変化に対して，画像によらずに同様の傾向がみられ，最大値は $N_x = 5, M = 25$ の場合に得られていることがわかる．この場合の提案手法によって，画像 Girl に対して得られた結果を図 4 (a) に示す．同図 (b), (c) にはそれぞれ $N_x = 3, M = 9$ の場合の提案手法，および共 3 次内挿法による拡大結果を示す．図 (a), (b) が図 (c) よりもボケの少ない画像になっていることがわかる．図 5 に拡大図を示す．図 (a), (b), (c) がそれぞれ，原画像，提案手法 ($N_x = 5, M = 25$)，共 3 次内挿法である．この図からも，提案手法が共 3 次内挿法より原画像に近くなっていることがわかる．

提案手法に必要な計算量は，式 (15) からわかるように， M の値に関係なく一画素あたり乗算 $N_x N_y$ 回である．従って，図 4 で最も計算量が少ない手法は (b) の場合である．すなわち，この場合の提案手法により，共 3 次内挿法より少ない計算量で，より高精度な画像拡大を実現できていることがわかる．

5 まとめ

あらかじめ特定した画像中の重要成分を完全再構成する標本化定理を用いて，新しい画像拡大法を提案した．重要成分に DCT 基底の低周波成分を用いることにより，共 3 次内挿法より少ない計算量で，より高精度の画像拡大を実現できることを示した．ところで，本論文では重要成分の選定を発見的な手法で行った．今後は，画像の性質に基づいて最適な重要成分を決定する方法を開発していくことにする．

参考文献

- [1] H. Aly, *Regularized Image Up-sampling*, Ph.D. thesis, University of Ottawa, Nov. 2004.
- [2] S. Baker and T. Kanade, "Hallucinating Faces," in *Proc. of the 4th IEEE Int. Conf. on Automatic Face and Gesture Recognition*, pp. 1–6, 2000.
- [3] D. Kong, M. Han, W. Xu, H. Tao and Y. Gong, "A conditional random field model for video super-resolution," in *Proc. the 18th Int. Conf. on Pattern Recognition*, pp. 1–4, 2006.
- [4] 高木幹雄，下田陽久監修，画像解析ハンドブック，第 2 版，東京大学出版会，東京，2003．
- [5] S.K. Park and R.A. Schowengerdt, "Image reconstruction by parametric cubic convolution," *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol.23, pp.258–272, 1983.
- [6] 平林晃，ミカエル・ウンサー，"近似手法としての標本化理論の一拡張，" 電子情報通信学会技術研究報告，信号処理研究会，no.CAS2005-102, pp.37–42, March 2006.
- [7] Y. C. Eldar, "Sampling and reconstruction in arbitrary spaces and oblique dual frame vectors," *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 9, no. 1, pp. 77–96, 2003.